Daniel Sitaru

FENOMEN ALGEBRIC

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Editura Paralela 45

CUPRINS

Editor: Călin Vlasie

Corectură şi culegere computerizată: autorul
Coperta: Ionuţ Broştianu
Prepress: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
SITARU, DANIEL
Fenomen algebric / Daniel Sitaru. - Piteşti : Paralela 45, 2017
Conţine bibliografie
ISBN 978-973-47-2522-9

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Piteşti, jud. Argeş, cod 110174, str. Fraţii Goleşti 130
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444
0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492.
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

capitolul 1

Teoreme celebre

Inegalitatea CAUCHY-SCHWARZ

$$(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2);\ a,b,x,y \in \mathbb{R}$$

$$(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2);\ a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right); a_i, x_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1,n}$$

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{x+y}; a,b \in \mathbb{R}; x,y \in (0,\infty)$$

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}; a,b,c \in \mathbb{R}; x,y,z \in (0,\infty)$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}; a,b,c,x,y,z \in (0,\infty)$$

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\dots+\frac{a_n^2}{x_n} \ge \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{x_1+x_2+\dots+x_n}; a_i \in \mathbb{R}; x_i > 0; i \in \overline{1,n}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}; (\forall) a,b,c \in (0,\infty)$$

$$\frac{a}{b+nc}+\frac{b}{c+na}+\frac{c}{a+nb} \ge \frac{3}{n+1}; a,b,c \in (0,\infty);\ n \in \mathbb{N}^*$$

Inegalitatea MINKOWSKI

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2} \le \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2} \le \sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2}$$

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2} \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sqrt{(x_1+a_1)^2+(x_2+a_2)^2+\dots+(x_n+a_n)^2}$$
$$\le \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}+\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$$
$$x_i; a_i \in \mathbb{R}; i \in \overline{1,n}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$p > 1; x_i, y_i \in \mathbb{R}; i \in \overline{1,n}; n \in \mathbb{N}^*$$

capitolul 2 Algebră – Enunţuri

1. Să se găsească minimul expresiei:

$$E=\frac{4ab-11a^2-14b^2}{3(a^2+b^2)};\ a,b\in\mathbb{R}^*$$

2. Să se arate că dacă $a,b,c\in(0,\infty)$ atunci:

$$\sum a^2\left(\frac{1}{2016a^2+2015b^2}+\frac{1}{2016a^2+2015b^2}\right)>\frac{3}{4031}$$

3. Să se arate că dacă $a,b,c\in(0,\infty);\ m\in\mathbb{R}^*,\ a+b+c=\frac{2}{m^2}$ atunci:

$$\sqrt{m^2a+1}+\sqrt{m^2b+1}+\sqrt{m^2c+1}\le 4$$

4. Să se arate că dacă $a,b,c\in\left(\frac{1}{k},\infty\right);\ k>0,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2k$ atunci:

$$\sqrt{ka-1}+\sqrt{kb-1}+\sqrt{kc-1}\ge\sqrt{a+b+c}$$

5. Să se arate că dacă $x,y,z\ge 0;\ t\in\mathbb{R};\ n\in\mathbb{N},\ x+y+z=6t$ atunci:

$$x\sqrt{y+n}+y\sqrt{z+n}+z\sqrt{x+n}\le\sqrt{3}\left(6t^2+(3n+1)t\right)$$

6. Să se arate că dacă $x,y,z\ge 0$ și $x+y+z=2$ atunci:

$$x\sqrt{y+1}+y\sqrt{z+1}+z\sqrt{x+1}\le 2\sqrt{3}$$

7. Să se arate că dacă $a,b,c,d\in(0,\infty);\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{d}$ atunci:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-d)(b-d)(c-d)}\ge 27$$

capitolul

3 Algebră – Soluţii

1. Să se găsească minimul expresiei:

$$\boldsymbol{E = \frac{4ab - 11a^2 - 14b^2}{3(a^2 + b^2)}; a, b \in \mathbb{R}^*}$$

Soluție:

$$E = \frac{4ab - 11a^2 - 14b^2}{3(a^2 + b^2)} = \frac{4a^2 + b^2 + 4ab - 15a^2 - 15b^2}{3(a^2 + b^2)} =$$

$$= \frac{(2a+b)^2 - 15(a^2+b^2)}{3(a^2+b^2)} = \frac{(2a+b)^2}{3(a^2+b^2)} - 5 \geq -5, \quad \min E = -5 \; pentru \; 2a + b = 0$$

2. Să se arate că dacă $\boldsymbol{a, b, c \in (0, \infty)}$ atunci:

$$\boldsymbol{\sum a^2 \left(\frac{1}{2016a^2 + 2015b^2} + \frac{1}{2016a^2 + 2015b^2}\right) > \frac{3}{4031}}$$

Soluție:

$$\frac{a^2}{2016a^2 + 2015b^2} + \frac{b^2}{2016b^2 + 2015a^2} > \frac{(a+b)^2}{4031(a^2 + b^2)} > \frac{1}{4031} \cdot \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} > \frac{1}{4031}$$

$$deoarece \; \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} > 1; \; (a+b)^2 > a^2 + b^2, a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2; 2ab > 0$$

Analog:

$$\frac{a^2}{2016a^2 + 2015c^2} + \frac{c^2}{2016c^2 + 2015a^2} > \frac{1}{4031}$$

$$\frac{b^2}{2016b^2 + 2015c^2} + \frac{c^2}{2016c^2 + 2015b^2} > \frac{1}{4031}$$

$$\sum a^2 \left(\frac{1}{2016a^2 + 2015b^2} + \frac{1}{2016a^2 + 2015b^2}\right) > \frac{3}{4031}$$

3. Să se arate că dacă $\boldsymbol{a, b, c \in (0, \infty); m \in \mathbb{R}^*, a + b + c = \frac{2}{m^2}}$ atunci:

$$\boldsymbol{\sqrt{m^2 a + 1} + \sqrt{m^2 b + 1} + \sqrt{m^2 c + 1} \leq 4}$$

Bibliografie

1. D.M. Bătinețu-Giurgiu, Maria Bătinețu-Giurgiu, I. Bîrchi-Damian, A. Semenescu: *Analiză Reală* – Editura „Matrix – Rom" – București, 2004.
2. Gh. Sireţchi: *Calcul diferențial și integral*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
3. Dragoș Popescu, George Oboroceanu: *Exerciții și probleme de algebră combinatorică și teoria numerelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
4. Gheorghe Andrei, Constantin Caragea, Gheorghe Bordea: *Algebră pentru concursuri de admitere și olimpiade școlare*, Editura Topaz, Constanța, 1993.
5. Gheorghe Andrei, Constantin Caragea, Viviana Ene: *Algebră pentru concursuri de admitere și olimpiade școlare*, Editura Scorpion, București, 1995.
6. Ion Savu & colaboratori: *Probleme pregătitoare pentru olimpiade școlare,* Editura Art, București, 2006.
7. M. Popescu, D. Sitaru: *Concursul „Traian Lalescu". Probleme de geometrie,* Litografia Universității din Craiova, Craiova, 1985.
8. Daniel Sitaru, Claudia Nănuţi: *Concursul național de matematici aplicate – „Adolf Haimovici" – etapa județeană*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2011.
9. Daniel Sitaru, Claudia Nănuţi: *Concursul național de matematici aplicate – „Adolf Haimovici" – etapa națională"*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2011.
10. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Probleme de concurs,* Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2011.
11. Daniel Sitaru, Claudia Nănuţi: *Bacalaureat – Probleme – Teste – Subiecte*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2011.
12. Daniel Sitaru: *Probleme de geometrie afină și euclidiană*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2012.
13. Daniel Sitaru, Claudia Nănuţi: *Bacalaureat – Probleme – Teste – Subiecte – 2010 – 2013*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2012.
14. Daniel Sitaru: *Geometrie hipercomplexă și cuaternionică*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2013.
15. Daniel Sitaru, Claudia Nănuţi: *Bazele algebrei*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2013.
16. Daniel Sitaru, Claudia Nănuţi: *Lecții de matematică*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2013.
17. Daniel Sitaru, Claudia Nănuţi: *Bazele analizei matematice*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2014.
18. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Matematici pentru olimpiade*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2014.
19. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți, Leonard Giugiuc, Diana Trăilescu: *Inegalități – Inequalities,* Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2015.
20. Daniel Sitaru: *Math Phenomenon*, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
21. Daniel Sitaru, Radu Gologan, Leonard Giugiuc: *300 Romanian Mathematical Challenges*, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.